Corrigé / Olympiades de Mathématiques / Exercice 2 / National 2023

UNE DESCENTE INFINIE

Partie 1.

1. $b = -(r_1 + r_2)$ et $c = r_1 r_2$.
2. $c \geq 0$ donc $r_1$et r_2 sont de même signe. $b \leq 0$ est négatif donc la somme de $r_1$et r_2 est positive. On en déduit donc que $r_1$et r_2 sont positifs.

Partie 2.

1. ***a.*** Comme (x_1, x_2, x_3) solution de l'équation (1), on a $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$.
   Or $\alpha > 0$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ donc $x_1 x_2 x_3 \geq 0$.
   Ainsi $|x_1||x_2||x_3| = |x_1 x_2 x_3| = x_1 x_2 x_3$ et $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).
   b. Si (x_1, x_2, x_3) est triplet d'entiers relatifs différent de (0,0,0) solution de l'équation (1), alors d'après la question précédente, $(|x_1|, |x_2|, |x_{3|})$ solution triplet d'entiers naturels de l'équation (1) différent de (0,0,0).
2. Par commutativité du produit et de la somme, le triplet (x_2, x_1, x_3) est alors aussi solution de l'équation (E).
3. Si l'équation (E) admet une solution (x_2, x_1, x_3) différente de (0,0,0), d'après la question 1b., on obtient un triplet de nombres entiers naturels différents de (0,0,0) et solution de (E). Puis, d'après la question 2., en et en la généralisant d'autres permutations du triplet), on obtient une solution (x_1, x_2, x_3) différente du triplet (0,0,0) telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3.

1. On sait déjà que $x_1 \geq 0$. Si $x_1 = 0$, alors le membre de droite de l'égalité est nul et donc $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, les x_i sont donc tous nuls et la seule solution est le triplet (0,0,0), ce qui est contraire à l'hypothèse.
2.
   a. (x_1, x_2, y) est solution si et seulement si $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$ c'est-à-dire y est racine de Q.
   b. x_3 est une racine de Q.
   c. On écrit $Q(x_2) = (x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2\ ) = (2x_2^2 + x_2^2\ \ - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2)$ d'où le résultat.
   On sait que x_1, x_2 sont des entiers non nuls donc supérieurs ou égaux à 1, d'où $3 - \alpha x_1 x_2 \leq 3 - \alpha < 0$ et $x_2^2 > 0$ donc $(3 - \alpha x_1 x_2)x_2^2 < 0$ et on a $0 < x_1 \leq x_2$ donc donc $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$.
   D'où en sommant $Q(x_2) < 0$.
   d. $Q(0) = x_1^2 + x_2^2$ et $0 < x_1 \leq x_2$ donc $Q(0) > 0$.
   e. $Q(x_2) < 0$ donc la fonction polynôme du second degré Q change se signe sur **R**. On en déduit que l'équation $Q(x) = 0$ possède exactement deux solutions distinctes réelles. On connaît x_3. On note y l'autre solution.
   La fonction polynôme Q est positive à l'extérieur des racines et négative à l'intérieur. Donc, comme $Q(x_2) < 0$, x_2 est entre ces racines (strictement). Comme $x_2 \leq x_3$, on en déduit que $y < x_2 < x_3$.
   On sait que $Q(0) > 0$, donc 0 est à l'extérieur des racines donc soit inférieur strictement à y soit strictement supérieur à x_3. Mais comme $0 < x_2$, on en conclut que $0 < y < x_2 < x_3$.
   f. D'après la partie **1.**, $y + x_3 = \alpha x_1 x_2$ qui est un entier comme produit d'entiers. Comme $x_3$est un entier, y est un entier. Il est naturel d'après la question **e.**.
3. En réitérant ce procédé sur le triplet (x_1, x_2, y) (réordonné dans l'ordre croissant) au lieu de (x_1, x_2, x_3), on obtient un triplet d'entiers distincts de (0,0,0) dont le max a encore strictement décru .
   On obtient ainsi une suite strictement décroissante d'entier naturels y_n, ce qui est impossible. Ainsi, il n'existe pas de triplet d'entiers naturels $(x_1, x_2, x_3\ )$ différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.
4. Par l'absurde, s'il existait un triplet d'entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3\ )$ différent de (0,0,0), solution de (E), alors, d'après la question **3.** de la partie 2, il existerait un triplet d'entiers naturels $(x_1, x_2, x_3\ )$ différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, ce qui est impossible d'après la question précédente.
5. On généralise le raisonnement en considérant d'abord le polynôme $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 \dots x_{n-1} x + \ x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$, en montrant que $Q(x_{n-1}) = (n - \alpha x_1 \dots x_{n-2}) x_{n-1}^2 + (x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 - (n-2) x_{n-1}^2)$ d'où on déduit $Q(x_{n-1}) > 0$ alors qu'on a $Q(0) > 0$.